Státní maturita 2010
Maturitní generálka 2010
Matematika: didaktický test - vyšší úroveň obtížnosti
MAGVD10C0T01
řešené příklady

Autor řešení: Jitka Vachtová

6. března 2012

http://www.vachtova.cz/

Obsah

1 Úloha 1

max. 2 body

Jsou dána čísla $s = 9 \cdot 10^{180}$, $t = 54 \cdot 10^{160}$. Ve stejném tvaru (součin co nejmenšího přirozeného čísla a mocniny deseti) uveďte čísla a, b:

1. $a = s : 45$
2. $b = s^2 : t$ [novamaturita.cz]

Řešení

1. $a = s : 45$

$$\begin{aligned} a &= s : 45 \\ a &= 9 \cdot 10^{180} \cdot \frac{1}{45} \\ a &= 10^{180} \cdot \frac{1}{5} \\ a &= 10 \cdot 10^{179} \cdot \frac{1}{5} \\ a &= 2 \cdot 10^{179} \end{aligned}$$

2. $b = s^2 : t$

$$\begin{aligned} b &= s^2 : t \\ b &= \left(9 \cdot 10^{180}\right)^2 : \left(54 \cdot 10^{160}\right) \\ b &= \frac{\left(9 \cdot 10^{180}\right)^2}{54 \cdot 10^{160}} \\ b &= \frac{3^{2 \cdot 2} \cdot 10^{180 \cdot 2}}{2 \cdot 3^3 \cdot 10^{160}} \\ b &= \frac{3^4 \cdot 10^{360}}{2 \cdot 3^3 \cdot 10^{160}} \\ b &= \frac{3 \cdot 10^{200}}{2} \\ b &= \frac{3 \cdot 10 \cdot 10^{199}}{2} \\ b &= 3 \cdot 5 \cdot 10^{199} \\ b &= 15 \cdot 10^{199} \end{aligned}$$

2 Úloha 2

max. 2 body

Pro $a > 0$ zjednodušte výraz:
$\frac{\left(a^2-2\right)^2-4}{a^4+2a^3}$ [novamaturita.cz]

Řešení

$\frac{\left(a^2-2\right)^2-4}{a^4+2a^3} = \frac{\left(a^2-2\right)^2-2^2}{a^3\cdot(a+2)} = \frac{\left(a^2-2-2\right)\cdot\left(a^2-2+2\right)}{a^3\cdot(a+2)} = \frac{\left(a^2-4\right)\cdot a^2}{a^3\cdot(a+2)} = \frac{(a+2)\cdot(a-2)\cdot a^2}{a^3\cdot(a+2)} = \frac{(a-2)}{a} = \frac{a-2}{a}$
$a \neq 0$
$a \neq -2$, podmínky zde nejsou ani nutné, protože v zadání je $a > 0$.

3 Úloha 3

max. 2 body

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je určena vzorcem $a_n = \frac{300n}{n^2+1}$.

1. Kolik členů posloupnosti je větších než $\frac{3}{5}$?
2. Vypočtěte limitu a_n pro $n \longrightarrow +\infty$. [novamaturita.cz]

Řešení

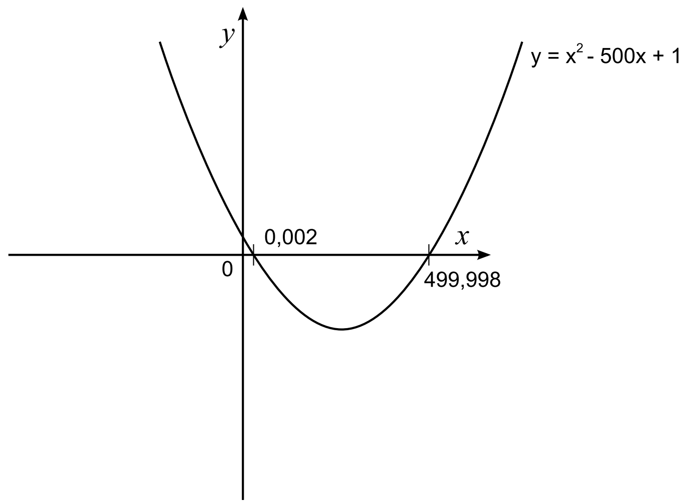
1. Kolik členů posloupnosti je větších než $\frac{3}{5}$?

   (a) Zjistíme si, pro jaké n je $a_n > \frac{3}{5}$.

$$\begin{aligned} a_n &> \frac{3}{5} \\ \frac{300n}{n^2+1} &> \frac{3}{5} \mid \cdot 5 \cdot \left(n^2+1\right) \\ 1500n &> 3\left(n^2+1\right) \mid : 3 \\ 500n &> n^2+1 \\ 0 &> n^2-500n+1 \\ n^2-500n+1 &< 0 \end{aligned}$$

   Pozn.: při násobení nerovnice $\left(n^2+1\right)$ jde o kladné číslo, takže se nerovnítko nezmění.

   (b) Budeme hledat kořeny rovnice $n^2 - 500n + 1 = 0$. Já si rovnici přepíšu pro neznámou x.
   $x^2 - 500x + 1 = 0$
   $D = b^2 - 4ac = (-500)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 250000 - 4 = 249996$
   $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{500\pm\sqrt{249996}}{2\cdot 1} = \frac{500\pm\sqrt{4\cdot 62499}}{2} = \frac{500\pm 2\sqrt{62499}}{2} = \frac{2\cdot\left(250\pm\sqrt{62499}\right)}{2} = 250 \pm \sqrt{62499}$
   $x_1 = 499,998$
   $x_2 = 0,002000008 \doteq 0,002$
   Z průběhu funkce $y = x^2 - 500x + 1$určím požadovaný interval pro nerovnici.



(c) $x^2 - 500x + 1 < 0$ pro $x \in (0,002000008; 499,998)$
$a_n > \frac{3}{5}$ tedy pro $\{n \in N; 1 \leqq n \leqq 499\}$,což je 499 čísel.
499 členů posloupnosti je větší jak $\frac{3}{4}$.

2. Vypočtěte limitu a_n pro $n \longrightarrow +\infty$.

(a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{300n}{n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{n^2 \cdot \frac{300}{n}}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{\frac{300}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$

4 Úloha 4

max. 2 body

V $\mathbb{R}$ řešte:
$x \log 4^{x+1} = (x+1)\log 8$ [novamaturita.cz]

Řešení

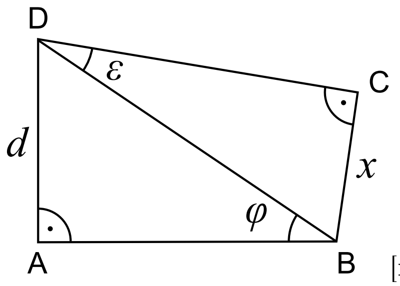
$$\begin{aligned}
x \log 4^{x+1} &= (x+1)\log 8 \\
\log 4^{x(x+1)} &= \log 8^{x+1} \\
4^{x(x+1)} &= 8^{x+1} \\
2^{2x(x+1)} &= 2^{3(x+1)} \\
2x(x+1) &= 3(x+1) \\
2x^2 + 2x &= 3x + 3 \\
2x^2 - x - 3 &= 0
\end{aligned}$$

$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$
$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2} = \frac{1\pm 5}{4}$
$x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
$x_2 = \frac{1-5}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

5 Úloha 5

max. 2 body

Je dán čtyřúhelník $ABCD$ (viz obrázek). Strana BC má délku x, strana AD délku d, velikosti úhlů BCD a ABD jsou ε a φ, vnitřní úhly při vrcholech A a C jsou pravé. Vyjádřete délku x v závislosti na veličinách ε, φ a d.



[novamaturita.cz]

Řešení

Využijeme goniometrické funkce pravoúhlého trojuhelníku.

$$\begin{aligned} \sin\varepsilon &= \frac{x}{|DB|} \\ |DB|\sin\varepsilon &= x \\ x &= |DB|\sin\varepsilon \end{aligned}$$

Vyjádříme DB pomocí d a φ.

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{d}{|DB|} \\ |DB| &= \frac{d}{\sin\varphi} \end{aligned}$$

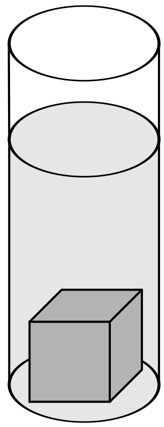
Doplníme do předchozí rovnice

$$\begin{aligned} x &= |DB|\sin\varepsilon \\ x &= \frac{d}{\sin\varphi}\cdot\sin\varepsilon \\ x &= \frac{d\sin\varepsilon}{\sin\varphi} \end{aligned}$$

6 Úloha 6

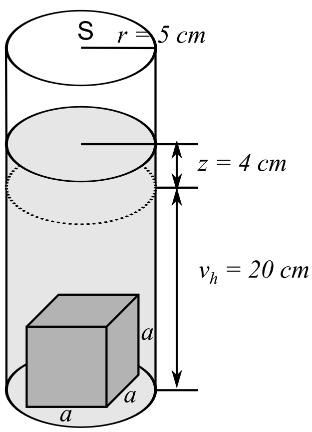
max. 2 body

V nádobě tvaru válce o poloměru podstavy 5 cm sahá voda do výšky 20 cm. Ponořením ocelové krychle hladina stoupne o 4 cm. Kolik centimetrů měří hrana krychle? Údaj zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



[novamaturita.cz]

Řešení



Objem vytlačeného vodního sloupce (válce) V_v je shodný s objemem krychle V_k.

$$\begin{aligned} V_v &= S_p \cdot v \\ V_v &= \pi r^2 \cdot z \\ V_v &= 3,14 \cdot 5^2 \cdot 4 \\ V_v &= 100\pi \, cm^3 \end{aligned}$$

Objem krychle:

$$\begin{aligned} V_k &= V_v \\ V_k &= a^3 \\ 100\pi &= a^3 \\ a &= \sqrt[3]{100\pi} \\ a &\doteq 6,8\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Výšku v_h jsme ani nepotřebovali. Jen bychom si měli ověřit, že výška hladiny byla dostatečná na to, aby krychle opravdu vytlačila vodní sloupec, a nikoli nějaký jiný útvar… Zde výška hladiny 20 cm dostatečná byla.

7 Úloha 7

max. 2 body

Ze vztahu $y = \frac{x+2}{x+3}$ vyjádřete pro přípustné hodnoty y proměnnou x. [novamaturita.cz]

Řešení

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x+2}{x+3} \mid \cdot (x+3) \\
y(x+3) &= x+2 \\
yx+3y &= x+2 \\
yx-x &= 2-3y \\
x(y-1) &= 2-3y \mid : (y-1) \\
x &= \frac{2-3y}{y-1}
\end{aligned}
$$

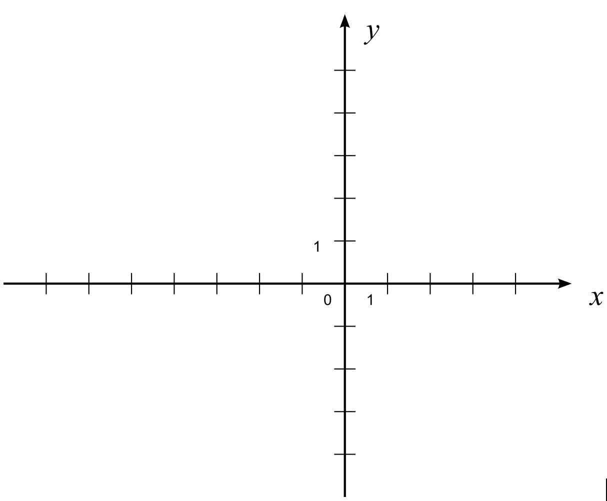
pro $y \neq 1$.

8 Úloha 8

max. 3 body

Reálná funkce f s reálnou proměnnou x je dána předpisem: $f(x) = 1 - \frac{1}{x+3}$.

1. Určete průsečíky X a Y grafu funkce fs osami souřadnic x a y.
2. Sestrojte graf funkce f.



[novamaturita.cz]

Řešení

1. Průsečíky lze vyčíst následně z grafu či tabulky hondnot. Pokud bychom tabulku hodnot nedělali, tak lze průsečíky vypočítat:

   Průsečík s osou x je moment, kdy $y = 0$, takže platí:

$$
\begin{aligned}
y &= 1-\frac{1}{x+3}\\
0 &= 1-\frac{1}{x+3}\\
\frac{1}{x+3} &= 1\\
1 &= x+3\\
-2 &= x\\
x &= -2
\end{aligned}
$$

$X\left[-2,0\right]$

Průsečík s osou y je moment, kdy $x=0$, takže platí:

$$
\begin{aligned}
y &= 1-\frac{1}{x+3}\\
y &= 1-\frac{1}{0+3}\\
y &= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$Y\left[0,\frac{2}{3}\right]$

2. Graf funkce $f(x)=1-\frac{1}{x+3}$, $x\neq -3$

   (a) Sestrojíme graf funkce $f_1(x)=-\frac{1}{x}$, $x\neq 0$

      i.

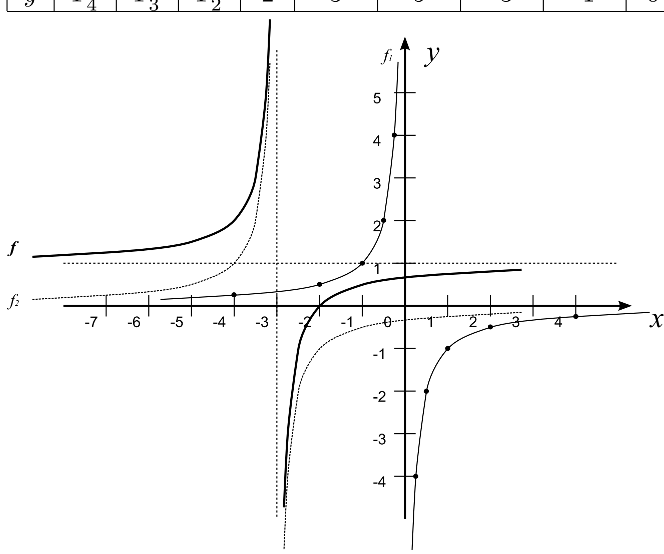
x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	-4	-2	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

   (b) Sestrojíme graf funkce $f_2(x)=-\frac{1}{x+3}$, který vznikne posunem funkce f_1 o 3 jednotky ve směru záporné osy x.

   (c) Sestrojíme výsledný graf funkce $f(x)=1-\frac{1}{x+3}$, který vznikne posunem funkce f_2 o 1 jednotku ve směru kladné osy y.

      i. Případně můžeme také udělat tabulku hodnot:

x	-7	-6	-5	-4	$-3\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{4}$	$-2\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	-2	-1	0	1
y	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{2}$	2	3	5	-3	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$



      ii.

Z tabulky hodnot vyčteme průsečík s osou $x : X\,[-2, 0]$
Z tabulky hodnot vyčteme průsečík s osou $y : Y\,\left[0, \frac{2}{3}\right]$

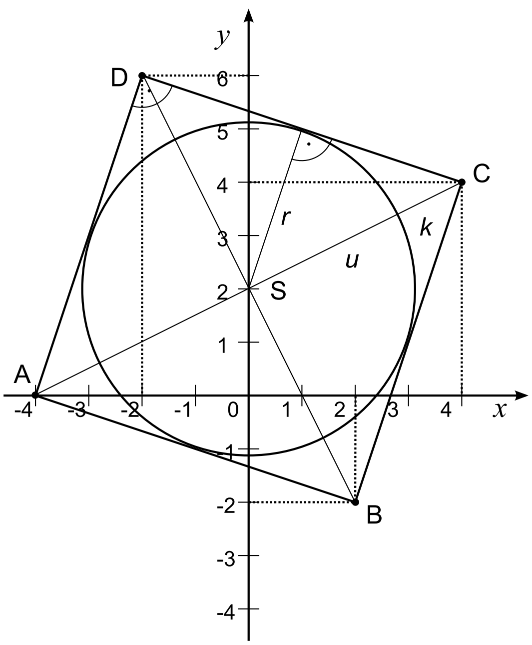
9 Úloha 9

max. 4 body

Kružnice k se středem S je vepsána do čtverce s vrcholy $A\,[-4; 0]$, $B\,[2; -2]$, $C\,[4; 4]$ a $D\,[-2; 6]$.

1. Proveďte náčrtek.
2. Určete souřadnice středu S, poloměr r a rovnici kružnice k. Do záznamového archu **uveďte celý postup řešení** včetně náčrtku! [novamaturita.cz]

Řešení



1. Spočítáme souřadnice středu S.
   Střed S je středem úsečky AC (úlopříčky u).
   $S\,[x_S, y_S]$
   Souřadnice středu S vzniknou "zprůměrováním souřadnic krajních bodů A a B".
   $x_S = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-4+4}{2} = \frac{0}{2} = 0$
   $y_S = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2$
   Souřadnice středu tedy jsou: $S\,[0, 2]$
2. Spočítáme poroměr r.
   (a) $r = \frac{|AD|}{2}$
   $|AD| = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{\left[-2 - (-4)\right]^2 + (6-0)^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2 \cdot \sqrt{10}$
   $r = \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$
   (b) Sestavíme středovou rovnici kružnice se středem $S\,[m, n]$.

$$
\begin{aligned}
(x-m)^2+(y-m)^2 &= r^2 \\
(x-0)^2+(y-2)^2 &= \left(\sqrt{10}\right)^2 \\
x^2+(y-2)^2 &= 10
\end{aligned}
$$

10 Úloha 10

max. 4 body

Během prvních 5 dnů se vyrobilo denně v průměru o čtvrtinu výrobků méně, než se vyrobilo v každém z 10 následujících dnů. Celkem se vyrobilo 2 200 výrobků. Kolik výrobků z tohoto počtu připadá na prvních 5 dnů?

Do záznamového archu **uveďte celý postup řešení!** [novamaturita.cz]

Řešení

během prvních 5 dnů denní výroba	...	$x-\frac{1}{4}x=0,75\cdot x$
dalších 10 dnů denní výroba	...	x
Celkem vyrobeno		2 200 ks

Sestavíme rovnici:

$$
\begin{aligned}
5\cdot 0,75\cdot x+10x &= 2\,200 \\
3,75x+10x &= 2\,200 \\
13,75x &= 2\,200 \mid \cdot 100 \\
1\,375x &= 220\,000 \mid : 1375 \\
x &= 600
\end{aligned}
$$

Denní výroba v prvních 5 dnech byla 600 ks výrobků.

11 Úloha 11

max. 3 body

Každou z následujících úloh vyřešte, vyhledejte **správné** řešení z nabídky a vyznačte je **křížkem** v příslušném poli tabulky záznamového archu.

K výrazům 1–3 přiřaďte ekvivalentní vyjádření z nabídky A – E pro libovolné $x\in\mathbb{R}$.

1.	$(\cos x-\sin x)^2$	A)	1
2.	$\cos^2(-x)+\sin^2(-x)$	B)	-1
3.	$1-\cos 2x$	C)	$1-\sin 2x$
		D)	$2\sin^2 x$
		E)	není uvedeno

[novamaturita.cz]

Řešení

1. $(\cos x-\sin x)^2$

   $(\cos x-\sin x)^2=\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x=1-2\cos x\sin x=1-\sin 2x$
   Jde tedy o volbu C).

2. $\cos^2(-x)+\sin^2(-x)$

   $\cos^2(-x)+\sin^2(-x)=1$
   Jde tedy o volbu A).

3. $1 - \cos 2x$

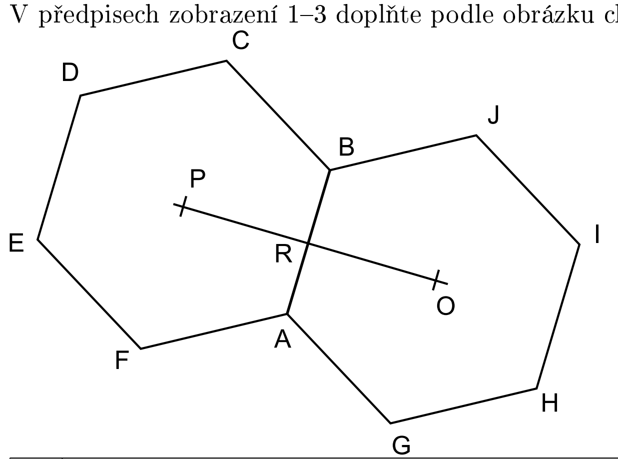
   $1 - \cos 2x = 1 - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x = \sin^2 x + \sin^2 x = 2\sin^2 x$

   Jde tedy o volbu D).

12 Úloha 12

max. 3 body

V předpisech zobrazení 1–3 doplňte podle obrázku chybějící symboly z nabídky A – E.

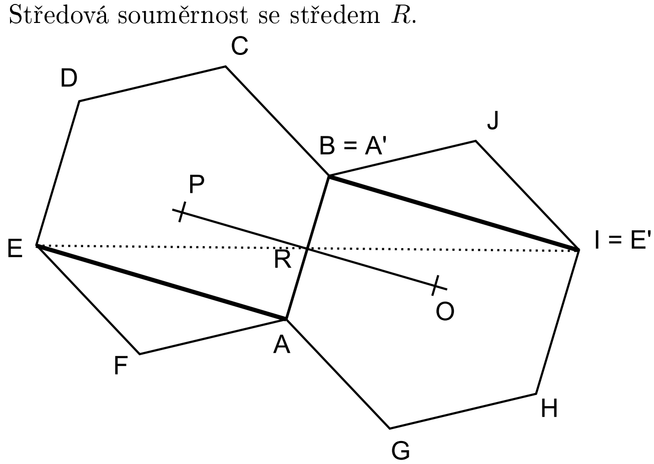


1.	Ve středové souměrnosti se středem R se úsečka AE zobrazí na ___.	A)	AB
2.	V osové souměrnosti s osou ___ se úsečka DG zobrazí na úsečku IF.	B)	AC
3.	V otočení se středem F o úhel $\alpha = 60^\circ$ se úsečka PO zobrazí na ___.	C)	BI
		D)	EB
		E)	EC

[novamaturita.cz]

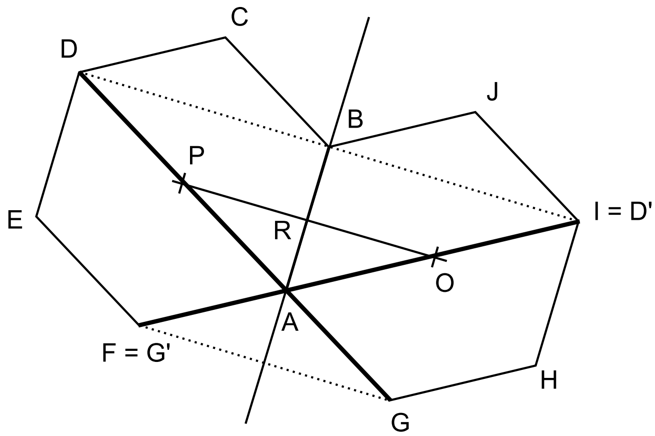
Řešení

1. Středová souměrnost se středem R.



   AE se zobrazí na BI.
   Jde o voblu C).

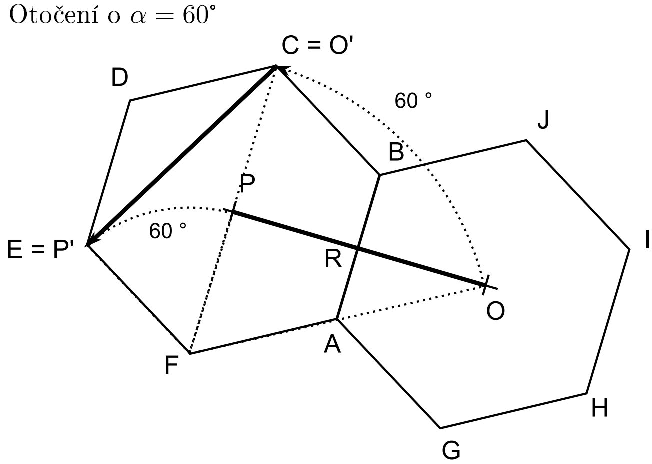
2. Osová souměrnost



Osou souměrnosti je přímka AB.

Jde o volbu A).

3. Otočení o $\alpha = 60°$



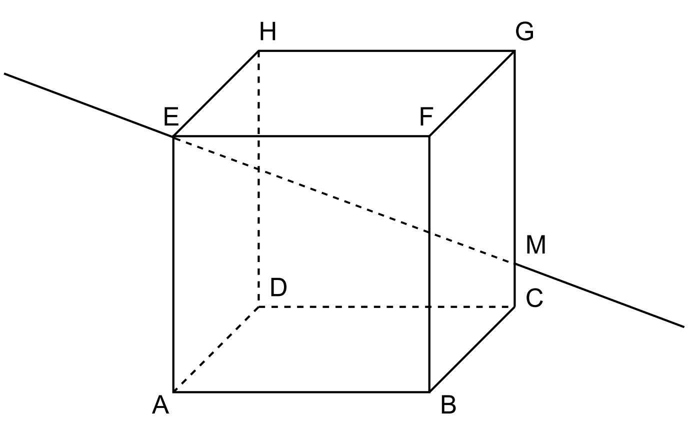
Úsečka PO se zobrazí na EC.

Jde o volbu E).

13 Úloha 13

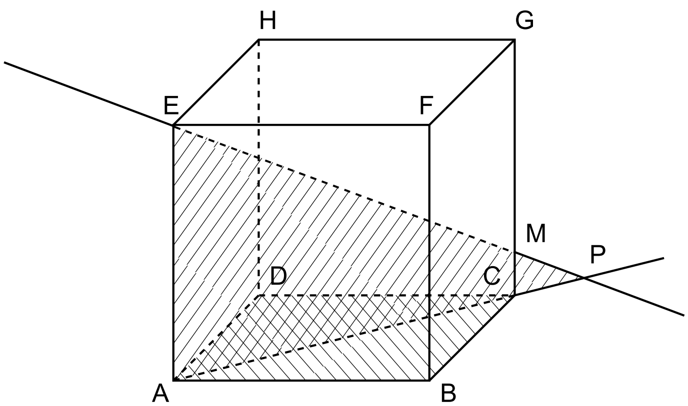
max. 2 body

Bod M je vnitřním bodem hrany CG krychle $ABCDEFGH$. Na které přímce určené vrcholy krychle leží průsečík přímky EM s rovinou ABD?



A) na přímce AC
B) na přímce AD
C) na přímce BC
D) na přímce CD
E) na jiné přímce [novamaturita.cz]

Řešení



Pokud se dvě přímky mají protínat v jednom bodě, tak toto dvě přímky musí vytvářet jednu rovinu. Takže musíme najít rovinu, která je určena body E, M a dvěma vrcholy krychle. Ze zadání úlohy v úvahu připadají pouze vrcholy z roviny ABD. Jednu rovinu s přímkou EM mohou vytvořit pouze vrcholy A, C. Jde o rovinu $ACME$.

Jak je vidět z obrázku, když vedeme komlou rovinu z bodů EM na rovinu ABD, průsečnice těchto rovin je přímka AC. Právě na této přímce bude ležet hledaný průsečik P.

Jde o volbu A).

14 Úloha 14

max. 2 body

Jaká je odchylka φ přímky $p : x\sqrt{3} + y = 0$ a přímky $q : x = \sqrt{3}$?
A) $\varphi = 90°$
B) $\varphi = 60°$
C) $\varphi = 45°$
D) $\varphi = 30°$
E) Přímky jsou rovnoběžné. [novamaturita.cz]

Řešení

Využiji analytické geometrie a vzorečku pro výpočet odchylky dvou přímek.

1. Nejprve si obě přímky převedeme do obecného tvaru:
   $p : \sqrt{3}x + y = 0$
   $q : x - \sqrt{3} = 0$

2. Vyjádříme si normálové vektory:
   $\overrightarrow{n_p} = (\sqrt{3}, 1)$
   $\overrightarrow{n_q} = (1, 0)$

3. Vypočítáme odchylku přímek:

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{|\overrightarrow{n_p}\cdot\overrightarrow{n_q}|}{|\overrightarrow{n_p}|\cdot|\overrightarrow{n_q}|}\\
\cos\alpha &= \frac{\left|\sqrt{3}\cdot 1+1\cdot 0\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2}}\\
\cos\alpha &= \frac{\left|\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{1}}\\
\cos\alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 1}\\
\cos\alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\alpha &= 30^\circ
\end{aligned}
$$

Jde o volbu D).

Pozn.: Úlohu by šlo řešit i pomocí směrnice přímky p, která je $k=-\sqrt{3}$. Přímka q je rovnoběžná s osou y. Pomocí směrnice bychom vypočítali úhel, který svírá přímka p s osou x a pak ho následně přepočítali na úhel, který musí svírat s osou y, a tedy i přímkou q.

15 Úloha 15

max. 2 body

Určete součet s nekonečné geometrické řady $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$, kde pro všechna přirozená čísla n platí:

$a_n=\frac{4^{n-1}}{2^{3n}}$

A) součet neexistuje

B) $s=\frac{3}{4}$

C)$s=\frac{3}{16}$

D) $s=\frac{1}{4}$

E) jiná reálná hodnota [novamaturita.cz]

Řešení

1. Určíme první člen pro $n=1$.

   $a_1=\frac{4^{1-1}}{2^{3\cdot 1}}=\frac{4^0}{2^3}=\frac{1}{8}$

2. Určíme q:

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{a_{n+1}}{a_n}\\
q &= \frac{\frac{4^{n+1-1}}{2^{3(n+1)}}}{\frac{4^{n-1}}{2^{3n}}}\\
q &= \frac{4^{n+1-1}}{2^{3(n+1)}}\cdot\frac{2^{3n}}{4^{n-1}}\\
q &= \frac{4^{n-1}\cdot 4}{2^{3n}\cdot 2^3}\cdot\frac{2^{3n}}{4^{n-1}}\\
q &= \frac{2^2}{2^3}\\
q &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Pozn: q lze taky určit úpravou členu a_n na tvar s q^n:

$a_n = \frac{2^{2(n-1)}}{2^{3n}} = 2^{2n-2-3n} = 2^{-2-n} = \frac{1}{2^{2+n}} = \frac{1}{2^2 \cdot 2^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3. $0 < q < 1$ proto existuje součet nekonečné řady a je roven:
   $s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$
   Jde o volbu D).

16 Úloha 16

max. 2 body

Pro všechny reálné hodnoty proměnné x platí:
$(x+m)(x-2) = x^2 + bx + 8$
Který zápis bude po dosazení vypočtených hodnot b, m pravdivý?
A) $b = m + 2$
B) $b < m$
C)$b - 2m = 0$
D) $b > 0$
E) $b = 2 - m$ [novamaturita.cz]

Řešení

Rovnici upravíme do tvaru ax + bx + c:

$$\begin{aligned} (x+m)(x-2) &= x^2 + bx + 8 \\ x^2 - 2x + mx - 2m &= x^2 + bx + 8 \\ x^2 + (m-2)x - 2m &= x^2 + bx + 8 \end{aligned}$$

$b = m - 2$
tedy musí platit:
$b < m$
Jde o volbu B).

17 Úloha 17

max. 2 body

Značka automobilu se skládá ze šesti znaků. První tři znaky jsou některá z písmen ABCDEF a po nich následuje trojčíslí z číslic 0 až 9. (Znaky se mohou ve značce opakovat, takže existuje například značka ABA020.) Jaký maximální počet aut lze takto označit, když žádná dvě auta nesmí mít stejnou značku?
A) 1 216
B) 27 000
C) 35 568
D) 157 464
E) 216 000 [novamaturita.cz]

Řešení

Záleží na pořadí, proto jde o variace. Znaky či číslice se mohou opakovat, proto půjde o variace s opakováním.

Pro první tři znaky vybíráme tři písmena z šesti, proto $k = 3$, $n = 6$.

Pro další pozice vybíráme tři číslice z deseti, proto $k = 3$, $n = 10$.

Volby se vzájemně násobí podle kombinatorického pravidla součinu.

$V'(k, n) = n^k$

$V'(3, 6) \cdot V'(3, 10) = 6^3 \cdot 10^3 = 216 \cdot 1\,000 = 216\,000$

Jde o volbu E).

18 Úloha 18

max. 2 body

> Ve firmě jsou zaměstnanci rozděleni do dvou skupin. V první skupině mají zaměstnanci průměrný měsíční plat 45 000 korun, ve druhé pobírají průměrně 30 000 korun. Průměrný měsíční plat všech zaměstnanců firmy je 32 400 korun.

Kolik procent zaměstnanců je zařazeno do druhé skupiny?

A) méně než 75 %
B) alespoň 75 %, ale méně než 80 %
C) alespoň 80 %, ale méně než 85 %
D) alespoň 85 %, ale méně než 90 %
E) nejméně 90 % [novamaturita.cz]

Řešení

Počet zaměstnanců v první skupině … x

Počet zaměstnanců v druhé skupině … y

Když průměrným platem vynásobíme počet zaměstnanců, dostaneme celkově vyplacenou částku platů ve skupině.

Součet platů v první skupině … $45000 \cdot x$

Součet platů v druhé skupině … $30000 \cdot y$

Součet platů všech zaměstnanců … $32400 \cdot (x + y)$

Sestavíme rovnici:

$$\begin{aligned}
45\,000 \cdot x + 30\,000y &= 32\,400 \cdot (x + y) \\
45\,000 \cdot x + 30\,000y &= 32\,400 \cdot x + 32\,400 \cdot y \\
12\,600x &= 2\,400y \\
\frac{x}{y} &= \frac{2\,400}{12\,600} \\
\frac{x}{y} &= \frac{12}{63}
\end{aligned}$$

Známe poměr mezi počtem zaměstnanců první a druhé skupiny.

V první skupině je $12a$ zaměstnanců, a je nějaké číslo

V druhé skupině je $63a$ zaměstnanců

Celkem zaměstnacnů $12a + 63a = 75a$

V druhé skupině je tedy:

$\frac{\textit{část}}{\textit{celek}} \cdot 100 = \frac{63a}{75a} \cdot 100 = \frac{63}{75} \cdot 100 = 84$ % zaměstnanců.

Jde o volbu C).

19 Úloha 19

max. 2 body

Martin si půjčil částku 42 000 korun. Na konci každého úrokovacího období splatil 6 000 korun. Po pěti splátkách se dlužná částka snížila na 20 000 korun. Kolik procent z **dosud zaplacených** peněz šlo na platbu úroků?

A) téměř 24 %
B) téměř 27 %
C) 30 %
D) asi 33 %
E) jiný počet [novamaturita.cz]

Řešení

Kdyby půjčka nebyla úročena žádnými úroky, tak by půjčka po pěti splátkách klesla na: $42\,000 - 5 \cdot 6\,000 = 42\,000 - 30\,000 = 12\,000$ Kč

Tím že ale dluží po pěti splátkách ještě 20 000 Kč, tak muselo ze splátek ve výši 30 000 Kč "padnout" celkem na úroky $20\,000 - 12\,000 = 8\,000$ Kč. Úroky totiž nesnižují dluh.

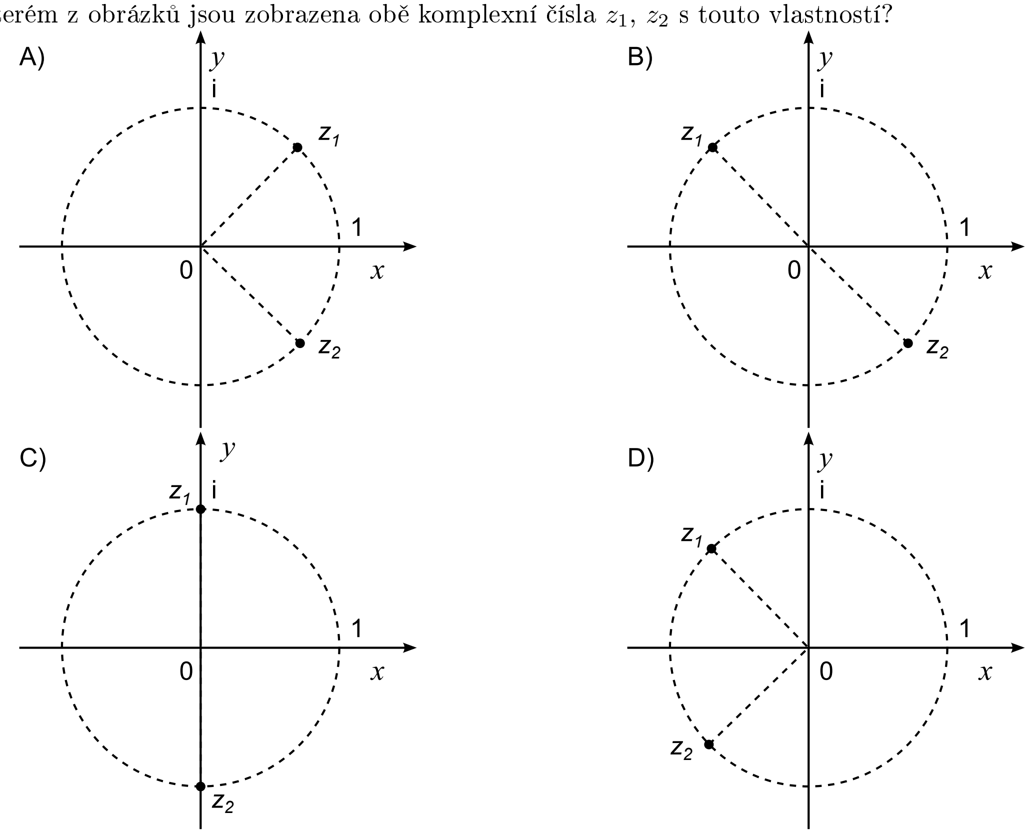
Na platbu úroků šlo tedy $\frac{8000}{30000} \cdot 100 = \frac{8}{30} \cdot 100 = \frac{4}{15} \cdot 100 = 26,\overline{6} \doteq 26,7$ %.

Jde o volbu B).

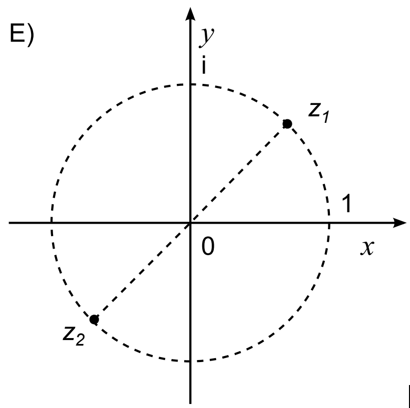
20 Úloha 20

max. 2 body

Hledáme komplexní číslo, jehož druhá mocnina je rovna číslu i (tj. imaginární jednotce). Na kterém z obrázků jsou zobrazena obě komplexní čísla z_1, z_2 s touto vlastností?



E)



[novamaturita.cz]

Řešení

1. Varianta řešení číslo 1.

   $z^2 = i$

   (a) komplexní číslo z vyjádříme v algebraickém tvaru

   $z = a + bi$

   $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

   $i = a^2 - b^2 + 2abi$

   reálné složky si musí být rovny$\Longrightarrow$

   $0 = a^2 - b^2$

   $a^2 = b^2$

   imaginární složky si musí být rovny $\Longrightarrow$

   $2ab = 1$

   $ab = \frac{1}{2}$

   (b) aby součin ab byl kladný, tak

   $a > 0$ a $b > 0$

   nebo

   $a < 0$ a $b < 0$

   Těmto podmínkám vyhovuje pouze varianta E).

2. Varianta řešení číslo 2.

   (a) komplexní číslo z vyjádříme v geometrickém tvaru

   $z = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha)$

   $z^2 = |z|^2 \cdot (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$

   z nákresů je patrné, že komplexní číslo z je komplexní jednotkou, tj. jeho velikost je rovna 1 $\Rightarrow |z| = 1$

   Pak platí:

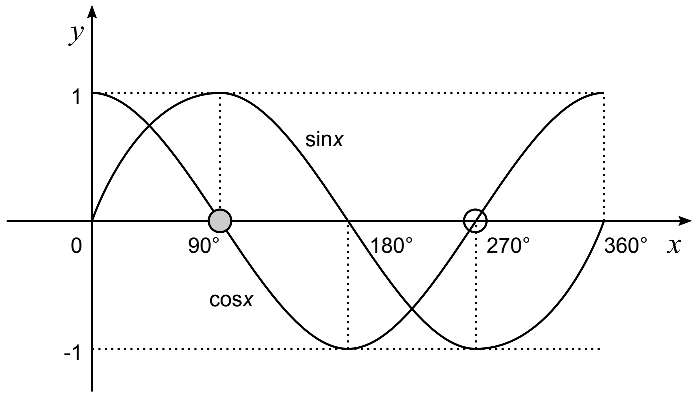
   $z = 1 (\cos\alpha + i \sin\alpha)$

   $z^2 = 1^2 \cdot (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$

   $z^2 = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$

   $i = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$

   (b) reálná složka tedy musí být rovna 0 a imaginární složka rovna 1.



$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 0\\ 2\alpha &= \varphi\\ \cos\varphi &= 0\\ \varphi &= 90^\circ + k\cdot 180^\circ\\ 2\alpha &= 90^\circ + k\cdot 180^\circ\\ \alpha &= 45^\circ + k\cdot 90^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 1\\ 2\alpha &= \varphi\\ \sin\varphi &= 1\\ \varphi &= 90^\circ + k\cdot 360^\circ\\ 2\alpha &= 90^\circ + k\cdot 360^\circ\\ \alpha &= 45^\circ + k\cdot 180^\circ\end{aligned}$$

$k \in \mathbb{Z}$
Protože úhel musí platit jak pro cos tak pro sin, vyhovuje pouze $\alpha = 45^\circ + k\cdot 180^\circ$. Pro $\alpha \in \langle 0^\circ, 360^\circ)$ jsou to dva úhly:
$\alpha_1 = 45^\circ$
$\alpha_2 = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$
Jde o volbu E).

21 Úloha 21

max. 3 body

Přirozené číslo n má na **předposledním** místě pětku a zbývajících 29 cifer tvoří dvojky. O každém z následujících tvrzení 1–4 rozhodněte, je-li **pravdivé (Ano)**, nebo **nepravdivé (Ne)**.

1. Číslo n je dělitelné čtyřmi.
2. Číslo$n$ je dělitelné osmi.
3. Číslo$n$ je dělitelné devíti.
4. Číslo$n$ je dělitelné šesti. [novamaturita.cz]

Řešení

Naše číslo vypadá takto: 222222222222222222222222222252

1. Dělitelnost čtyřmi

   Číslo je dělitelné čtyřmi, když je poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi.

   $52 : 4 = 13$

   Odpověď: ANO

2. Dělitelnost osmi

   Číslo je dělitelné osmi, když je poslední trojjčíslí dělitelné čtyřmi.

   $252 : 8 = 31,5$

   Odpověď: NE

3. Dělitelnost devíti

   Číslo je dělitelné devíti, když je ciferný součet dělitelné čtyřmi.

   Ciferný součet: $2 \cdot 29 + 5 = 63$

   $63 : 9 = 7$

   Odpověď: ANO

4. Dělitelnost šesti

   Číslo je dělitelné šesti, když dělitelné dvěma a třemi. Dělitelné dvěma jsou čísla končící na sudou cifru. Dělitelné třemi je číslo, jehož ciferný součet je dělitelný třemi.

   Číslo je dělitelné dvěma, protože končí na číslici 2.

   Ciferný součet: $2 \cdot 29 + 5 = 63$

   $63 : 3 = 21$

   Odpověď: ANO

Reference

[novamaturita.cz] Www.novamaturita.cz : Home » Testy a zadání » Maturitní generálka 2010 » Matematika » Didaktický test - vyšší úroveň obtížnosti [online]. 2010 [cit. 2010-11-20]. Oficiální stránky nové maturitní zkoušky. Dostupné z WWW: <http://www.novamaturita.cz/maturitni-generalka-2010-1404034731.html>.